- Lopitalovo pravilo - (1.)

Izvodi funkcija se mogu primijeniti i za nalaženje graničnih vrijednosti funkcija.

Teorema 1: (prvo Lopitalovo pravilo)

Neka su funkcije f i g diferencijabilne u nekoj okolini $O(x_0)$ tačke x_0, osim možda u samoj tački x_0 i $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.

Ako je $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$. i ako postoji

$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tada postoji $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

i pri tome je $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

(Ovu neodređenost simbolički označavamo $\frac{0}{0}$)

Primjer 1:

a) $$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Scanned by TapScanner

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{\sin x - x\cos x} = \left\lceil \frac{0}{0} \right\rfloor = \lim_{x\to 0} \frac{(x-\sin x)'}{(\sin x - x\cos x)'} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\cos x - \cos x + x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x\sin x} = \left\lceil \frac{0}{0} \right\rfloor =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\sin x + x\cos x} = \left\lceil \frac{0}{0} \right\rfloor =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = \frac{1}{2}$

Teorema 2: (drugo Lopitalovo pravilo).
Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u nekoj okolini $O(x_0)$ tačke x_0 osim možda u samoj tački x_0 i $g'(x) \neq 0$ za svako $x \in O(x_0)$, $x \neq x_0$.
Ako je $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$ i ako postoji $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tada postoji $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ i pri tome je $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(Ovu neodređenost označavamo $\frac{\infty}{\infty}$).

Primjer 2:

a) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2+2x}{e^x} = \left\lceil \frac{\infty}{\infty} \right\rfloor = \lim_{x\to +\infty} \frac{(x^2+2x)'}{(e^x)'} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x+2}{e^x} = \left\lceil \frac{\infty}{\infty} \right\rfloor = \lim_{x\to +\infty} \frac{(2x+2)'}{e^x} =$

Scanned by TapScanner

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

b) $$\lim_{x\to0^+} \frac{\ln x}{1+2\ln\sin x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to0^+} \frac{(\ln x)'}{(1+2\ln\sin x)'} =$$

$$= \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{2\cos x}{\sin x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} =$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x\cos x} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\cos x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x} = \frac{1}{2}$$

- Lopitalova pravila koristimo i za izračunavanje graničnih vrijednosti sa neodređenostima koje se simbolički zapisuju:

$0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 1^\infty,\ 0^0,\ \infty^0$

Primjer 3:

a) $$\lim_{x\to0^+} x\ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+}(-x) = 0.$$

b) $$\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right) = [\infty-\infty] = \lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x\sin x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x\sin x)'} = \lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{\sin x + x\cos x} =$$

$$= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\cos x+\cos x - x\sin x} = 0$$

Scanned by TapScanner

c) $\lim_{x\to 0^+} x^x = [0^0] = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} =$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} \underset{L}{=} e^0 = 1$

$(\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ (pr 3a))

- Izvodi višeg reda -

Neka funkcija $f(x)$ ima izvod u svakoj tački intervala (a,b). Tada je $f'(x)$ funkcija definisana na intervalu (a,b). Ako funkcija f' ima izvod u svakoj tački intervala (a,b), tada taj izvod nazivamo drugim izvodom funkcije f i označavamo sa $f''(x)$. Dakle,

$$f''(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f'(x+\Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$$

Analogno se definišu izvodi viših redova $f^{(n)}(x)$ $(n \geq 3)$

Primjeri:

a) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 + 4x - 3$

$f''(x) = 6x + 4$

b) $f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$

Scanned by TapScanner

Primjer: Naći n-ti izvod funkcije $y = \ln x$

$y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$, $y'' = -\frac{1}{x^2}$, $y^{(3)} = \frac{2 \cdot 1}{x^3}$,

$y^{(4)} = -\frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{x^4}$

Dokažimo matematičkom indukcijom da je

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

Očigledno formula važi za $n = 1$.

Pretpostavimo da formula važi za $n = k > 1$

tj. da je $y^{(k)} = (-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k}$.

Dokažimo da je formula tačna i za $n = k+1$.

$$y^{(k+1)} = \left(y^{(k)}\right)' = \left((-1)^{k-1} \cdot \frac{(k-1)!}{x^k} \right)' =$$

$$= (-1)^{k-1} \cdot (k-1)! \cdot (-k)\, x^{-k-1} =$$

$$= (-1)^k \cdot \frac{k!}{x^{k+1}}$$

Dakle, formula je tačna za svako $n \in N$.

Scanned by TapScanner

Teorema: Ako su funkcije f i g n-puta diferencijabilne u tački x, tada je:

$$(f\cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Primjer 5: Naći n-ti izvod funkcije $y = x^2 e^x$.

Kako je $y = f(x)\cdot g(x)$ gdje je $f(x) = e^x$, $g(x) = x^2$ to je:

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (e^x)^{(n-k)} \cdot (x^2)^{(k)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^x \cdot (x^2)^{(k)}$$

jer je $(e^x)' = (e^x)'' = \dots = (e^x)^{(n-k)} = e^x$.

Odredimo izvode funkcije x^2.

$(x^2)' = 2x$, $(x^2)'' = 2$, $(x^2)^{(3)} = 0$, $(x^2)^{(k)} = 0$ za $k \geq 3$

Otuda,

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} e^x (x^2)^{(k)} = \binom{n}{0} e^x x^2 + \binom{n}{1} e^x \cdot 2x + \binom{n}{2} e^x \cdot 2.$$

– Tejlorova formula –

Scanned by TapScanner

4.1.5 Tejlorova formula

Tejlorova formula je jedna od najčešće korišćenih formula matematičke analize. Izvešćemo ovu formulu prvo za polinome a zatim i za druge funkcije.

Tejlorova formula za polinome

Posmatrajmo polinom $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$. Ako je x_0 proizvoljan realan broj, smjenom $x = x_0 + t$, odnosno $t = x - x_0$, polinom $P(x)$ možemo zapisati u obliku

$$P(x_0 + t) = a_0 + a_1(x_0 + t) + \cdots + a_n(x_0 + t)^n = A_0 + A_1 t + \cdots + A_n t^n$$

odnosno

$$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + \cdots + A_n(x - x_0)^n.$$

Iz ove jednakosti slijedi da je $A_0 = P(x_0)$. Diferenciranjem iste jednakosti i stavljanjem $x = x_0$ dobijamo da je $P'(x_0) = A_1$. Daljim diferenciranjem dobijamo da je $P^{(k)}(x_0) = A_k \cdot k!$, za $k = 2, 3, \cdots, n$.

Zato se polinom $P(x)$ može zapisati u obliku jednakosti

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

koja se naziva *Tejlorovom formulom za polinome.*

Primjer 1. Ako je $P(x) = x^2 - 3x + 2$ tada je $P'(x) = 2x - 3$ i $P''(x) = 2$. U tački $x_0 = 1$ je $P(1) = 0$, $P'(1) = -1$, $P''(1) = 2$, pa se polinom $P(x)$ može zapisati u obliku

$$P(x) = 0 + (-1) \cdot (x - 1) + \frac{2}{2!}(x - 1)^2 = -(x - 1) + (x - 1)^2.$$

Tejlorova formula

Uvedimo sada Tejlorovu formulu za funkcije koje nisu polinomi. Neka je funkcija f diferencijabilna $n + 1$ puta na intervalu I koji sadrži tačku x_0. Tada polinom

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

nazivamo *Tejlorovim polinomom stepena n funkcije f za tačku x_0.*

Funkcija

$$R_{n+1}(x) = f(x) - Q_n(x)$$

tada predstavlja odstupanje funkcije f od njenog Tejlorovog polinoma i naziva se *Tejlorovim ostatkom.* Ostatak se može izraziti preko $(n+1)$–og izvoda funkcije f.

Neka je x_1 proizvoljna tačka intervala I. Tada je

$$f(x_1) = Q_n(x_1) + R_{n+1}(x_1).$$

Ostatak potražimo u obliku

$$R_{n+1}(x_1) = M(x_1 - x_0)^{n+1},$$

gdje M treba odrediti. Posmatrajmo zato funkciju

$$\varphi(x) =$$

$$f(x_1) - \left(f(x) + f'(x)(x_1 - x) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n + M(x_1 - x)^{n+1}\right).$$

Prvi izvod ove funkcije na intervalu I jednak je

$$\varphi'(x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(x_1 - x)^n - M(n+1)(x_1 - x)^{n+1}.$$

Nije teško provjeriti da funkcija φ zadovoljava sve uslove Rolove teoreme na odsječku sa krajevima x_0 i x_1. Primjenom ove teoreme dobijamo da postoji tačka $\xi \in I, \xi \neq x_1$, takva da je

$$\varphi'(\xi) = -(x_1 - \xi)^n \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!} - M(n+1)\right) = 0,$$

odakle je

$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}.$$

Dakle,

$$R_{n+1}(x_1) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x_1 - x_0)^{n+1}.$$

Pošto smo proizvoljno izabrali tačku x_1 sa intervala I, funkciju f možemo pisati u obliku

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

koja se naziva *Tejlorovom formulom za funkciju f.*

Specijalno, za $x_0 = 0$, Tejlorova formula se naziva *Meklorenovom formulom*.

Primjer **2.** Posmatrajmo funkciju $f(x) = e^x$. Pošto je $f^{(k)}(x) = e^x$ za svako $k \in N$, to je $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 1$. Po Tejlorovoj, odnosno Meklorenovoj, formuli je

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1},$$

gdje je tačka ξ iz intervala sa krajevima 0 i x.

Primjer **3.** Za funkciju $f(x) = \ln(1 + x)$ Meklorenova formula glasi

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{1}{(n+1)(1+\xi)^{n+1}}x^{n+1}.$$

Ako u Tejlorovoj formuli za funkciju f ostatak $R_{n+1}(x) \to 0$ kada $n \to \infty$ za $x \in I$, tada se ona može pisati u obliku

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots, \quad x \in I,$$

što se naziva *Tejlorovim redom funkcije f u tački x_0.*

Primjer **4.**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in R.$$

Primjer **5.**

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \cdots, \quad -1 < x \leq 1.$$